

## Logaritmická rovnice

Obecný tvar:  $\log_a x$  (čteme: logaritmus z  $x$  o základu  $a$ )

$a$  – základ logaritmu  $\rightarrow a \in R^+ - \{1\}$

$x$  – argument logaritmu  $\rightarrow x \in R^+$

### Vzorce

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^r = r$$

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1$$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Použití vzorců a principy počítání s logaritmy jsou stejné jako u logaritmů základních, proto před studováním tohoto materiálu vám doporučuji si přečíst materiál Základní logaritmy, který se nachází na [www.nasprtej.cz](http://www.nasprtej.cz).

Vzorce jsou stejné jako pro počítání se základními logaritmy, tudíž by vám již neměly činit větší problémy.

## Příklady

$$\log 100x + \log 10x = 7 \longrightarrow$$

$$\log 1\,000x^2 = 7$$

$$1000x^2 = 10^7$$

$$10^3x^2 = 10^7 \quad / : 10^3$$

$$x^2 = 10\,000$$

$$|x| = \sqrt{10\,000}$$

Podmínka:

$$100x > 0$$

$$x > 0$$

$$10x > 0$$

$$x > 0$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$x = \sqrt{10\,000}$$

$$x = 100$$

$$K = \{100\}$$

Pokud máme takto zadané dva logaritmy, které se sčítají, pak musíme použít vzoreček  $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$  a následně vzoreček, který se používá snad v úplně každém příkladě s logaritmy –  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ . Poté musíme rovnici odmocnit. Neznámá je nejdříve v absolutní hodnotě kvůli tomu, že měla sudý exponent. Je možnost, že by kořen mohl být jak kladný, tak i záporný, proto je důležité pracovat vždy s podmínkami, které často mění konečný výsledek rovnice. Podmínku musíme udělat především tam, kde se nachází neznámá. V našem případě se nalézá v argumentu. Ze základů o logaritmech víme, že argument logaritmu může být pouze kladné číslo. Argument musí být větší než nula, tedy  $100x > 0$  a  $10x > 0$ . Poté výsledky obou podmínek sjednotíme, čímž nám vyjde, že neznámá musí být kladná (větší než nula), teď už můžeme pokračovat v dopočítání příkladu a absolutní hodnotu odstranit, jelikož záporné číslo nemůže podle podmínky být řešením rovnice. Samotné určení podmínky obvykle není povinné, ale samozřejmě pro správný výsledek je podmínka velmi důležitá, proto je dobré si ji vždy na začátku, popř. na konci příkladu udělat.

Výsledek rovnice zapisujeme ve tvaru –  
 $K = \{a\}$  – kde místo  $a$  dosadíme kořen rovnice.

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20 \log_2 x) = -2 \longrightarrow$$

$$\log_a \log_3(1 + 20 \log_2 x) = -2$$

$a$                        $x$                        $y$

$$\log_3(1 + 20 \log_2 x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\log_3(1 + 20 \log_2 x) = 4$$

$$1 + 20 \log_2 x = 3^4$$

$$20 \log_2 x = 80 \quad / : 20$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4$$

$$x = 16$$

$$K = \{16\}$$

Tento příklad na první pohled vypadá velmi složitě, ale přitom zde použijeme pouze jeden vzorec, a to  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ .

Pro lepší představivost je vlevo označeno to, co je podle vzorce neznámá  $a$ ,  $x$  a  $y$ .

Následně znovu použijeme výše uvedený vzorec, poté upravíme, tedy převedeme jedničku na druhou stranu, rovnici vydělíme 20 a opět a naposledy použijeme stejný vzoreček, který nás dovedl již ke správnému řešení.

Výsledek rovnice zapisujeme ve tvaru –  
 $K = \{a\}$  – kde místo  $a$  dosadíme kořen rovnice.

$$\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(-3x) \longrightarrow$$

$$x^2 + 2x = -3x$$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0$$

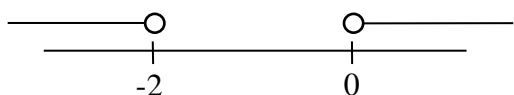
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -5$$

Podmínka:

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x + 2) > 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$$

$$x = -5$$

$$K = \{-5\}$$



Výsledek rovnice zapisujeme ve tvaru –  
 $K = \{a\}$  – kde místo  $a$  dosadíme kořen  
rovnice.

Pokud je na obou stranách rovnice logaritmus o stejném základu, tak můžeme rovnici tzv. **odlogaritmovat**, tedy lze logaritmy vypustit a porovnat pouze jejich argumenty  
Použili jsme tedy vzoreček  $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ .  
Poté dostaneme kvadratickou rovnici, kde stačí vytknout neznámou a poté určit nulové body. Vyšly nám dva body, ale ty nemusí být správným řešením, proto je opět velmi důležité udělat podmínku. Podmínku stačí určit pouze tam, kde se nachází neznámá, tedy v našem případě v argumentech logaritmů.

Podmínka nám vede na nerovnici kvadratickou. Vyřešíme ji buď dosazením do vzorce pro kvadratickou rovnici, nebo efektivnějším způsobem, což je vytknutí neznámé. Následně určíme nulové body, které zaneseme na osu (prázdná kolečka na ose jsou tam kvůli tomu, že v nerovnici je pouze znaménko nerovnosti bez rovnítka). Body nám rozdělily osu na tři intervaly, první od minus nekonečna do minus dvou, druhý od minus dvou do nuly a třetí od nuly do nekonečna. My se musíme rozhodnout, který z intervalů bude platný. Nejlépe to zjistíme tak, že do nerovnice dosadíme libovolné číslo z daného intervalu a pokud bude platit nerovnost, pak tam celý interval patří, takto budeme postupovat u každého intervalu. Následně zjistíme, že do řešení podmínky patří první a třetí interval, tedy neznámá ( $x$ ) může být číslo od minus nekonečna do minus dvou a od nuly do nekonečna. Po určení podmínky se opět vrátíme k řešení samotné logaritmické rovnice. Vyšly nám dva kořeny, ale pouze jeden se „vejde“ do podmínky. Ten, který splňuje podmínku, je celkovým řešením této rovnice, tedy číslo -5.

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$y^2 + 5y = 6$$

$$y^2 + 5y - 6 = 0$$

$$(y-1)(y+6) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -6$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$$

$$x+1 = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -6$$

$$x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$$

$$x = 2^6 - 1$$

$$x = 63$$

Podmínka:

$$x+1 > 0$$

$$x > -1 \rightarrow x \in (-1; \infty)$$

$$K = \left\{-\frac{1}{2}; 63\right\}$$

Další způsob, jak můžeme řešit rovnice, je použití tzv. **substituce**. Ta nahrazuje nějaký výraz výrazem, který si zvolíme. Je relativně dost těžké odhadnout, kdy ji použít, ale vždy, když se bude objevovat logaritmus na druhou, tak se velmi pravděpodobně bude jednat o použití substituce. Lze samozřejmě rovnici vyřešit i bez použití této metody, ale pak se výpočet stává dosti nepřehledným, lze tedy pak snáze udělat chybu.

Nejdříve tedy upravíme rovnici na tvar, na který půjde lehce použít substituce. V našem případě je rovnice už hned připravená a jako substituci si zvolíme  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ .

Poté když dosadíme do rovnice námi zvolený výraz, dostaneme obvykle kvadratickou rovnici, popř. jinou rovnici, kterou už lze počítat bez logaritmů. V našem případě kvadratickou rovnici vypočítáme a následně dostaneme požadované kořeny, které ještě ale **NEjsou** řešením rovnice. Ty jsou pouze řešení pro **substituci**. Je důležité si vzít substituci, kterou jsme vytvořili, a do ní za  $y$  (popř. jinou neznámou, kterou jsme si zvolili místo našeho  $y$ ) dosadit kořeny rovnice. Následně nám vyjde celkové řešení rovnice, tedy dva kořeny.

Pak ale ještě musíme zohlednit **podmínku** rovnice, tedy z jakého intervalu může být daná neznámá. Podmínka se určuje pouze tam, kde se nachází neznámá v zadání, tedy v našem případě podmínka argumentu. Ta ale celkové řešení neovlivnila, tudíž již můžeme oba kořeny zapsat jako výsledek této rovnice.

Výsledek rovnice zapisujeme ve tvaru –  $K = \{a\}$  – kde místo  $a$  dosadíme kořen rovnice.

$$\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$$

$$\log_8 (\sqrt{x+30} \cdot \sqrt{x}) = 1$$

$$\log_8 \sqrt{x^2 + 30x} = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 30x} = 8^1 \quad /^2$$

$$\sqrt{(x^2 + 30x)^2} = 8^2$$

$$x^2 + 30x = 64$$

$$x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{1156}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-30 + 34}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-30 - 34}{2} = -\frac{64}{2} = -32$$

Zkouška:

$x_1$ :

$$L = \log_8 \sqrt{-32 + 30} + \log_8 \sqrt{-32} = \emptyset$$

$$P = 1$$

$$L \neq P$$

$x_2$ :

$$L = \log_8 \sqrt{2 + 30} + \log_8 \sqrt{2} = \log_8 \sqrt{32 \cdot 2} = \log_8 \sqrt{64} = \log_8 8 = 1$$

$$P = 1$$

$$L = P = 1$$

Podmínka:

$$\sqrt{x+30} > 0 \quad \sqrt{x} > 0$$

$$x > -30 \quad x > 0$$

$$x \in (0; \infty)$$

$$K = \{2\}$$

Příklady použity z:

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

Nejdříve použijeme vzoreček  $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$ , čímž dostaneme tvar pro použití vzorečku  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ . Následně dostaneme **iracionální rovnici**.

Celou rovnici umocníme, čímž po upravení dostaneme kvadratickou rovnici.

Když dostaneme kořeny rovnice, tak musíme udělat zkoušku pro rovnici, jelikož jsme použili při výpočtu **neekvivalentní** úpravu (odmocnění apod.).

Ve zkoušce nám vyšlo, že řešením rovnice je pouze jeden kořen, tedy číslo 2.

Poslední věc, kterou musíme udělat, je určení podmínky. Podmínku určíme u neznámé ze zadání. Zde je neznámá v argumentu, tudíž celý argument musí být kladné číslo. Jelikož se celý argument nachází v odmocnině, tak je jisté, že číslo, které se odmocní, bude vždy kladné, tudíž argument nikdy nebude záporný – viz podmínky vlevo. Podmínka nám výsledný kořen neovlivnila, tudíž již můžeme do celkového řešení této rovnice zapsat kořen, tedy číslo 2.