Kvadratická rovnice

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

a – koeficient kvadratického členu
ax^2 – kvadratický člen
b – koeficient lineárního členu
bx – lineární člen
c – absolutní člen

Kvadratická rovnice má vždy **2 kořeny**, protože má dva diskriminanty. Proto je také v rovnici mezi b a odmocninou $\pm$. Jeden diskriminant bude mít před odmocninou mínus a druhý plus – viz rovnice níže.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow$$

Diskriminant – bez odmocniny!

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Řešte kvadratickou rovnici, kde $x \in R$:

$$1x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 4$$

Ze začátku, pro lepší přehlednost, si můžete zapsat, čemu se rovná a, b a c – viz zápis vlevo. Čemu se rovná a, b a c poznáme podle obecného tvaru kvadratické rovnice - $ax^2 + bx + c = 0$. Znaménka mezi ax^2 a bx či bx a c jsou v obecném tvaru kladná (+), ale v příkladech mohou být i záporná (-).

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 4}}{2 \,.\, 1}$$

Poté už stačí pouze dosadit do vzorce a vypočítat.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4} \\ x_2 &= \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$$

V posledním kroku si vzorec napíšeme pro každou neznámou zvlášť – viz rovnice vlevo.

$\boldsymbol{K = \{4;\ 1\}}$

Řešení kvadratické rovnice zapisujeme ve tvaru: $K = \{a_1;\ \ a_2\}$ – místo a_1 a a_2 dosadíme výsledné kořeny rovnice.

Řešte kvadratickou rovnici, kde $x \in R$:

$$\frac{1}{x+4} - \frac{4}{x-4} + \frac{x^2-20}{x^2-16} = 0$$

Takto na první pohled „obyčejná" rovnice může vést na **rovnici kvadratickou.** Nejdříve tyto typy rovnic vypočítáme jako úplně obyčejnou rovnici. Až její výsledek teprve řešíme kvadratickou rovnicí.

$$\frac{1}{x+4} - \frac{4}{x-4} + \frac{x^2-20}{(x+4)(x-4)} = 0 \qquad /.(x+4)(x-4)$$

$$1(x-4) - 4(x+4) + x^2 - 20 = 0$$

$$x - 4 - 4x - 16 + x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Když dostaneme takovýto výsledek rovnice, tak je jasné, že ho musíme dopočítat přes rovnici kvadratickou. Můžeme ji vypočítat **dvěma způsoby.**

1. způsob:

První způsob je dosazení do vzorečku kvadratické rovnice. Tento způsob je velmi pomalý, ale lze ho použít u každého případu, kde se řeší kvadratická rovnice.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-40)}}{2\,.\,1}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 13}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = \mathbf{8}$$

$$x_2 = \frac{3-13}{2} = -\frac{10}{2} = \mathbf{-5}$$

2. způsob:

Druhý způsob (rozklad) je velmi **rychlý**, ale **nelze** ho použít u každého případu, kde se řeší kvadratická rovnice. Tento způsob Vám vřele **doporučuji**. Více o tomto způsobu se dozvíte v kapitole Rozklad kvadratických trojčlenů, kterou najdete na www.nasprtej.cz.

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = -5$$

$$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{8};\ \mathbf{-5}\}$$

Jak vidíte, tak tento postup je krátký a tudíž i velmi rychlý. Samozřejmě, jak u prvního, tak i u druhého způsobu vyšly kořeny rovnice stejně!

Řešení kvadratické rovnice zapisujeme ve tvaru: $K = \{a_1;\ a_2\}$ – místo a_1 a a_2 dosadíme výsledné kořeny rovnice.

3 možná řešení kvadratické rovnice

1) Když je diskriminant menší než nula ($D < 0$), tak rovnice **nemá řešení.**

$2x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\,.\,2\,.\,3 = 4 - 24 = \mathbf{-20}$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,.\,2\,.\,3}}{2\,.\,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{4}$$

$\boldsymbol{K} = \emptyset$

Jaký je diskriminant, zjistíme tehdy, když si do diskriminantu ($b^2 - 4ac$) dosadíme hodnoty, které máme v zadání rovnice – viz rovnice vlevo.

Diskriminant je záporný, tudíž rovnice nemá řešení. Můžeme si to samozřejmě ověřit tím, že si hodnoty dosadíme do vzorečku kvadratické rovnice – viz rovnice vlevo.

2) Když je diskriminant roven nule ($D = 0$), tak rovnice má právě **jeden kořen.**

$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\,.\frac{1}{3}\,.\,3 = 4 - 4 = \mathbf{0}$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,.\frac{1}{3}\,.\,3}}{2\,.\,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{4}$$

$$x_1 = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{K} = \left\{\mathbf{\frac{1}{2}}\right\}$$

Diskriminant je roven nule, tudíž rovnice bude mít jeden kořen. Můžeme si to samozřejmě ověřit tím, že si hodnoty dosadíme do vzorečku kvadratické rovnice – viz rovnice vlevo.

3) Když je diskriminant rovnice větší než nula ($D > 0$), tak rovnice má právě **2 kořeny.**

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\,.\,1\,.\,(-3) = 4 + 12 = \mathbf{16}$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,.\,1\,.\,(-3)}}{2\,.\,2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$x_2 = \frac{2-4}{4} = -\frac{2}{4} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{K} = \left\{\mathbf{\frac{3}{2}}; -\mathbf{\frac{1}{2}}\right\}$$

Diskriminant je kladný, tudíž rovnice bude mít dva kořeny. Můžeme si to samozřejmě ověřit tím, že si hodnoty dosadíme do vzorečku kvadratické rovnice – viz rovnice vlevo.

Příklady použity z:

CHARVÁT, Jura; ZHOUF, Jaroslav; BOČEK, Leo. Matematika pro gymnázia : Rovnice a nerovnice. 3. vydání. Praha : Prometheus, 2002. 223 s. ISBN 80-7196-154-X.