Goniometrické rovnice

Funkce

$\sin x$ – sinus (x = argument sinu) $x \in \langle -1; 1 \rangle$

$\cos x$ – kosinus (x = argument kosinu), $x \in \langle -1; 1 \rangle$

$\operatorname{tg} x$ – tangens (x = argument tangenty), $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{cotg} x$ – kotangens (x = argument kotangenty), $x \in \mathbb{R}$

Existují čtyři goniometrické funkce – sinus, kosinus, tangens a kotangens. Výraz (číslo), ze kterého je daná funkce (v obecném tvaru je to *x*) se nazývá argument. Argument může u sinu a kosinu být libovolné číslo v intervalu od mínus jedné do jedné. U tangenty a kotangenty může být argument jakékoliv libovolné číslo.

Vzorce

Níže naleznete spoustu vzorců, které se nejčastěji používají při řešení goniometrických rovnic. Všechny tyto vzorce je možné použít, ale samozřejmě není nutné všechny nazpaměť znát (leckdy i nemožné). Vzorce, které jsou níže tučně zvýrazněny, jsou doporučené si zapamatovat, jelikož jsou nejzákladnějšími a nejčastějšími vzorci v různých úlohách, samozřejmě ale narazíte i na ostatní vzorce, takže záleží jenom na vás zda se je naučíte všechny nebo ne.

Základní vzorce:

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}$$

$$\mathbf{cotg}\, \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x}}$$

$$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cotg}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{sin^2}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{cos^2}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$$

Součtové vzorce:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Vztahy pro dvojnásobný a poloviční úhel:

$$\mathbf{sin\, 2}\boldsymbol{x} = \mathbf{2\, sin}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{cos\, 2}\boldsymbol{x} = \mathbf{cos^2}\, \boldsymbol{x} - \mathbf{sin^2}\, \boldsymbol{x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Vztahy pro součet a rozdíl:

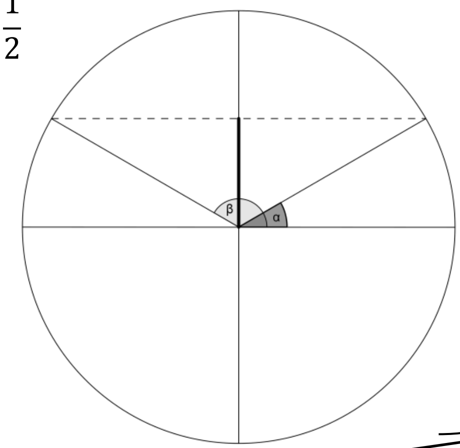
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$\sin x = \frac{1}{2}$



Nejdříve z tabulky pro goniometrické funkce zjistíme, kdy je sinus roven $\frac{1}{2}$. Je to tedy hodnota $\frac{\pi}{6}$, kterou přeneseme na jednotkovou kružnici, a poté pomocí osové souměrnosti zjistíme i druhé řešení – viz obr. vlevo.

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

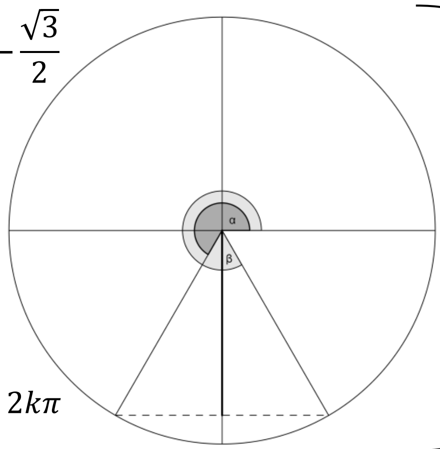
$\boldsymbol{x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$

Argument sinu porovnáme s výslednými hodnotami, které jsme zjistili na kružnici. K této hodnotě ještě přidáváme (přičítáme) $2k\pi$, což značí, že se tato hodnota opakuje vždy jedenkrát za jedno kolo (ten stejný bod je na kružnici pouze jednou – popř. neopakuje se pravidelně).

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Takto zadané rovnice řešíme tak, jako kdyby v argumentu sinu bylo pouze x. Předpokládáme tedy, kdy $\sin x$ je roven $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. To zjistíme z tabulky pro goniometrické funkce, a poté dořešíme na jednotkové kružnici – viz obr. vlevo. Když máme výsledné úhly, tak je dáme do rovnosti s argumentem sinu, vzniknou nám tak rovnice o jedné neznámé, ze kterých vyjádříme neznámou x, čímž dostaneme celkové řešení této goniometrické rovnice.

První řešení (α):

$2x_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

$2x_1 = \pi + 2k\pi \quad /:2$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

Druhé řešení (β):

$2x_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

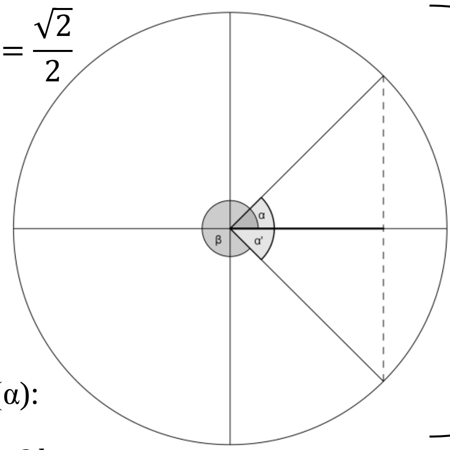
$2x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad /:2$

$\boldsymbol{x_2 = \frac{2}{3}\pi + k\pi}$

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Nejdříve z tabulky pro goniometrické funkce zjistíme, kdy se kosinus rovná pravé straně rovnice, tedy v našem případě číslu $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Příklad nejprve řešíme tak, jako kdyby na levé straně byl $\cos x$, tedy že v argumentu kosinu je **pouze** *x* (bez dalších členů).

První řešení (α):

$$x_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$x_1=\frac{2}{4}\pi+2k\pi$$

$$\boldsymbol{x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

Když na jednotkové kružnici nalezneme řešení (viz obr. výše), tak výsledek (výsledky) porovnáme s argumentem kosinu. Z rovnice poté vyjádříme neznámou *x*. – viz rovnice vlevo.

Druhé řešení (β):

$$x_2-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi+2k\pi$$

$$x_2=2\pi+2k\pi\rightarrow\boldsymbol{2k\pi}$$

$$\boldsymbol{K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi\right\}}$$

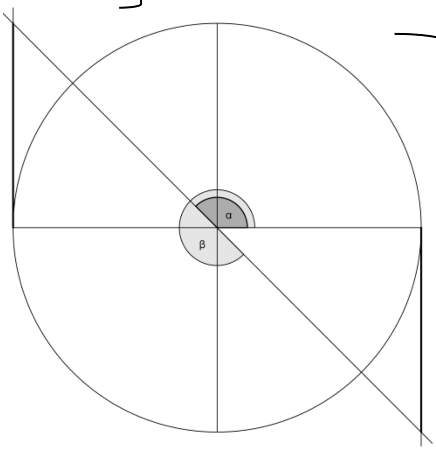
Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1;x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Abychom mohli použít jednotkovou kružnici, tak musí být na levé straně rovnice funkce sama (bez čísla před nebo za). Vše kromě funkce převedeme z levé části rovnice na druhou stranu, následně rovnici upravíme a dostaneme takový tvar, na který již lze aplikovat známá jednotková kružnice.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$



Když máme vhodný tvar, tak opět z tabulky pro goniometrické funkce zjistíme, kdy $\tan x = -1$, poté výsledek, který zjistíme na kružnici, dáme do rovnosti s argumentem tangenty. Jelikož se jedná o tangens, tak zde stačí pouze řešení alfa (popř. beta, to je zcela na vás), tudíž nemusíme počítat dvě rovnice jako u sinu či kosinu, ale stačí pouze jedna – viz řešení α vlevo.

Řešení (α):

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi+k\pi$$

$$\frac{x}{2}=\frac{6}{4}\pi+k\pi \quad /\cdot 2$$

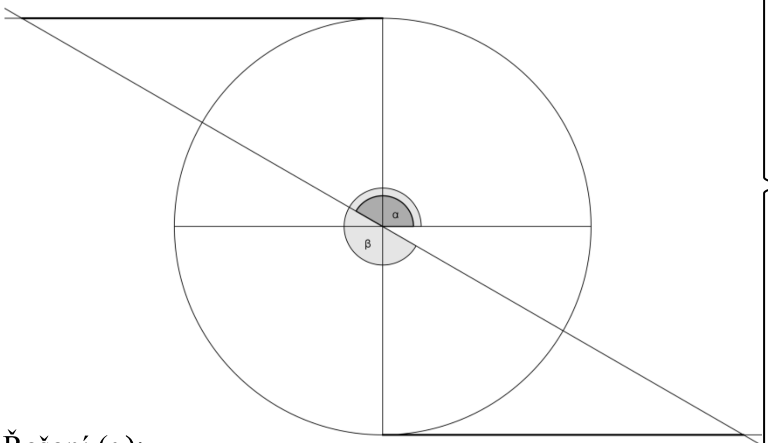
$$x=3\pi+2k\pi \rightarrow \boldsymbol{\pi+2k\pi}$$

Zde je zcela zbytečné, aby tam bylo 3π, jelikož 3π znamená jeden a půl kola a nám stačí pouze řešení v jednom kole (to, že nám řešení stačí pouze v jednom kole, značí číslo, které přičítáme, v našem případě je to 2kπ, kdybychom přičítali pouze kπ, tak by nás zajímala řešení pouze v půlkruhu apod.). Můžeme tedy jedno kolo zrušit, tedy od 3π odečteme 2π, zůstane tedy pouhé π.

$$\boldsymbol{K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\pi+2k\pi\}}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$



Nejdříve zjistíme, kdy $\operatorname{cotg} x=-\sqrt{3}$ z tabulky pro goniometrické funkce. Následně použijeme jednotkovou kružnici, na které si nalezneme požadovaný výsledek (u tangenty a kotangenty stačí pouze jedno řešení, buď řešení alfa, nebo beta, je na vás, které si vyberete). Výsledek pak dáme do rovnosti s argumentem kotangenty, kde vyjádříme neznámou x – viz řešení α vlevo.

Řešení (α):

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi+k\pi$$

$$\frac{x}{2}=\frac{7}{6}\pi+k\pi \quad /\cdot 2$$

$$x=\frac{14}{6}\pi+2k\pi$$

$$x=\frac{7}{3}\pi+2k\pi \rightarrow \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+2k\pi}$$

Zde je opět zbytečné, aby tam bylo $\frac{7}{3}$ π, jelikož $\frac{7}{3}$ π znamená jedno a třetina kola a nám stačí pouze řešení v jednom kole (to, že nám řešení stačí pouze v jednom kole, značí číslo, které přičítáme, v našem případě je to 2kπ, kdybychom přičítali pouze kπ, tak by nás zajímala řešení pouze v půlkruhu apod.). Můžeme tedy jedno kolo zrušit, tedy od $\frac{7}{3}$ π odečteme 2π, zůstane tedy pouhých $\frac{\pi}{3}$.

$$\boldsymbol{K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1;x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$2\sin^2 x - \sin x = 0$ $\longrightarrow$ Při takto zadané rovnici je nejlepší zavést substituci, tzn., že $\sin x$ se bude rovnat y.

Substituce: $y = \sin x$

$2y^2 - y = 0$ $\longrightarrow$ Pomocí této metody nám vznikne kvadratická rovnice, kde vytkneme pouze y, a poté už jen zjistíme nulové body. Tyto body jsou pak řešením pro **substituci**, ale **nejsou** celkovým řešením rovnice, proto tyto hodnoty musíme dosadit zpátky do substituce za y.

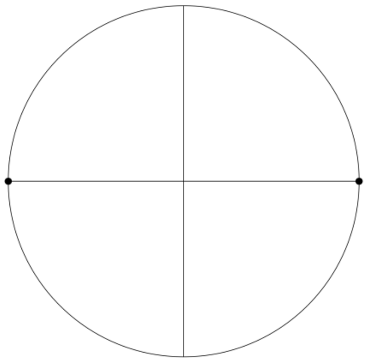
$y(2y - 1) = 0$

$y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}$

Dosazení zpátky do substituce:

$\sin x = 0$

$\boldsymbol{x = 0 + k\pi}$

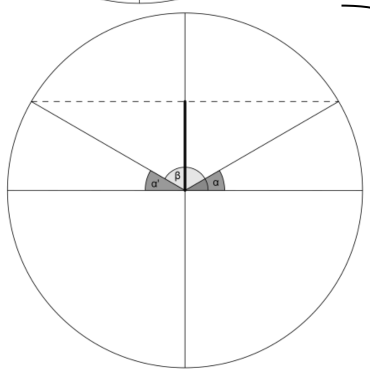


Po dosazení bodů za y nám vznikne tvar, který vyřešíme pomocí jednotkové kružnice, tzn., že z tabulky pro goniometrické funkce, kterou je dobré si pamatovat, zjistíme, že hodnota nula je pro sinus v úhlu nula, přičemž se tato hodnota opakuje vždy za půl kružnice. Řešením tedy je $0 + k\pi$ (obvykle se do řešení nula již nepíše).

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

$\boldsymbol{x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$



Nejdříve opět z tabulky pro goniometrické funkce zjistíme, že hodnota $\frac{1}{2}$ je pro sinus v úhlu 30°, tedy $\frac{\pi}{6}$, což se opakuje vždy jedenkrát za kružnici. Druhé řešení dostaneme tak, že bod, který nám na kružnici vyšel, převedeme pomocí osové souměrnosti přes vodorovnou půlící osu, čímž nám vyjde druhý bod, který má úhel β. Úhel β je velký jako celé π právě bez $\frac{1}{6}\pi$, tedy je roven $\frac{5}{6}\pi$.

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}}$$ $\longrightarrow$ Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{cotg} 3x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} 3x - \frac{1}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Kotangens můžeme také vyjádřit pomocí vztahu $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tedy v našem případě $\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$.

Substituce: $y = \operatorname{tg} 3x$

Dále užijeme substituci, pomocí které získáme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme s použitím vzorečku pro kvadratickou rovnici.

$$y - \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad /\cdot y\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y^2 - \sqrt{3} = 2y$$

$$\sqrt{3}y^2 - 2y - \sqrt{3} = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2\sqrt{3}}$$

$$y_1 = \frac{2+4}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{2-4}{2\sqrt{3}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

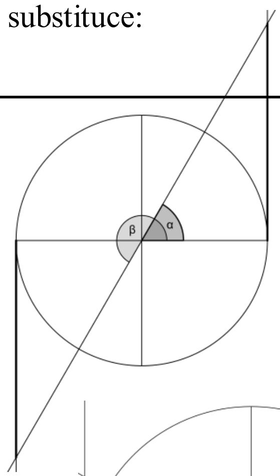
Dosazení zpátky do substituce:

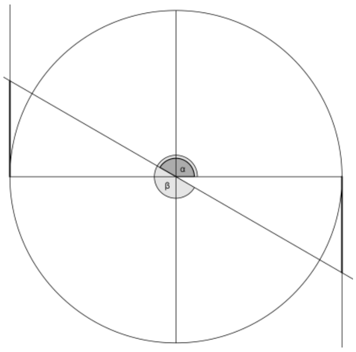
$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$$

Kořeny kvadratické rovnice musíme dosadit zpátky do substituce. Tuto situaci vyřešíme vždy pomocí jednotkové kružnice. Zde zjistíme, pro které úhly platí výsledné hodnoty z kvadratické rovnice pro $\tan x$. Hodnoty následně dáme do rovnosti s argumentem tangenty. Poté z rovnice vyjádříme neznámou *x*, čímž dostaneme výsledné řešení této goniometrické rovnice.

$$3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad /:3$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$$





$$\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Opět po dosazení kořenu z kvadratické rovnice za *y* nám vyšel tvar, který vyřešíme pomocí jednotkové kružnice, kde zjistíme hodnotu úhlu pouze pro $\tan x$, kterou následně dáme do rovnosti s argumentem tangenty. Zde pak vyjádříme neznámou *x*.

$$3x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad /:3$$

$$x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}; \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}\right\}}$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$$

Nejdříve převedeme stejné goniometrické funkce na jednu stranu rovnice. Dále aplikujeme vzoreček $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ na levou stranu rovnice a $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ na pravou stranu rovnice. Následně celou rovnici vydělíme mínus dvěma.

$$\sin 2x - \sin x = \cos x - \cos 2x$$

$$2\cos\frac{2x+x}{2}\sin\frac{2x-x}{2} = -2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2}$$

$$2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = -2\sin\frac{3x}{2}\sin-\frac{x}{2} \quad /:(-2)$$

$$\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

Vše převedeme na druhou stranu a vytkneme $\sin\frac{x}{2}$.

$$\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$$

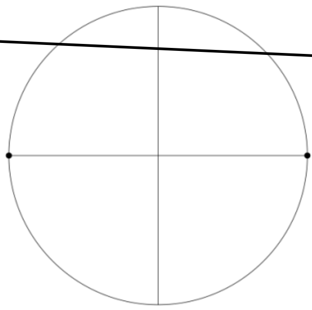
Zde si určíme nulové body rovnice, tedy když $\sin\frac{x}{2} = 0$ a $\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0$. Vzniknou nám tak dvě nové rovnice, které budeme samostatně počítat, přičemž jejich konečné výsledky následně sjednotíme.

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) = 0$$

Nulové body:

$$\sin\frac{x}{2} = 0$$

Tuto situaci vyřešíme pomocí jednotkové kružnice, kde zjistíme, pro které úhly je pouze $\sin x$ roven nule. Výsledek pak dáme do rovnosti s argumentem sinu – viz kapitola Jednotková kružnice, kterou naleznete na www.nasprtej.cz.



$$\frac{x}{2} = 0 + k\pi \quad /\cdot 2$$

$$\boldsymbol{x = 0 + 2k\pi}$$

$$\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0$$

V této situaci řešíme opět goniometrickou rovnici, kterou nejlépe vyřešíme tak, že $\cos\frac{3x}{2}$ převedeme na druhou stranu rovnice, a poté celou rovnici vydělíme $-\cos\frac{3x}{2}$, čímž nám vznikne výraz, který lze pomocí vztahu $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ přepsat jako $\tan\frac{3x}{2}$. Dostaneme tak tvar, který již můžeme řešit pomocí jednotkové kružnice – viz obr. vlevo.

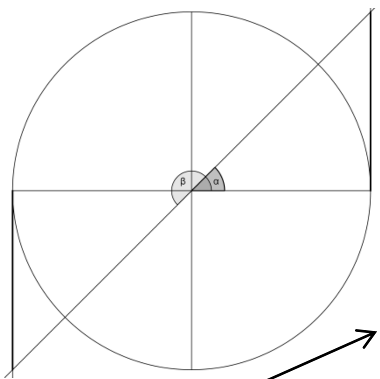
$$-\sin\frac{3x}{2} = -\cos\frac{3x}{2} \quad /:\left(-\cos\frac{3x}{2}\right)$$

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} = 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 1$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad /\cdot 2$$

$$3x = \frac{2\pi}{4} + 2k\pi \quad /:3$$



Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{0 + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right\}}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

Tyto rovnici můžeme vyřešit tak, že použijeme vzoreček $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ze kterého si vyjádříme kosinus $(1 - \sin^2 x)$ a dosadíme do rovnice za $\cos^2 x$.

$$\sin^4 x - \cos^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^4 x - (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2}$$

Závorky roznásobíme, a poté výrazy sečteme.

$$\sin^4 x - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$$

$$2\sin^2 x - 1 = \frac{1}{2}$$

$$2\sin^2 x = \frac{3}{2} \quad /:2$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

Po upravení dostaneme goniometrickou funkci s druhou mocninou. Celou rovnici umocníme, čímž ale **musíme** k výrazu na pravé straně rovnice přidat znaménko „plus mínus", jelikož výraz může být jak kladný, tak i záporný, jelikož se jedná o sudou mocninu.

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

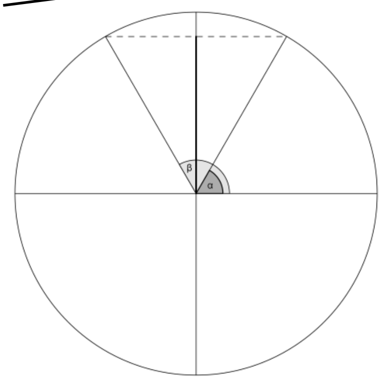
$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dostaneme tak dvě řešení, první, když je pravá strana rovnice kladná a druhé, když je záporná, tudíž řešíme dvě samostatné rovnice, přičemž jejich výsledky posléze sjednotíme.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

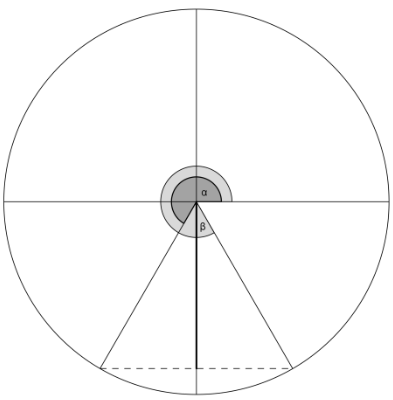
$$x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$



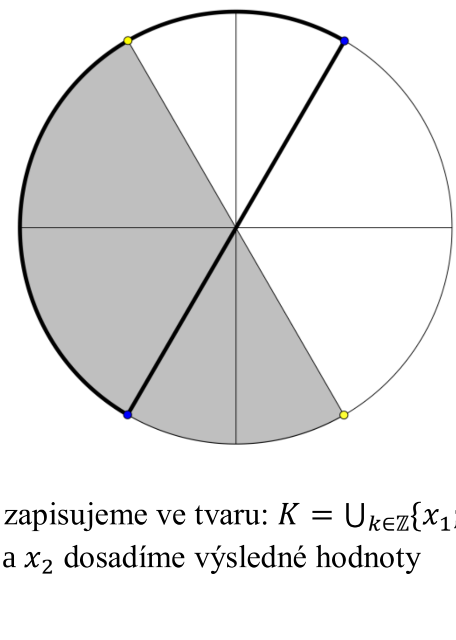
$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x_4 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$



Dostali jsme čtyři výsledky, které je možné (obvykle povinné) sjednotit do výsledků dvou. Na obrázku níže vidíte čtyři body (dva žluté, dva modré). Modré body jsou od sebe vzdáleny půl kružnice, tudíž stačí zapsat pouze jeden bod a za něj napsat kπ, tedy $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi}$. Stejným způsobem postupujeme i se žlutými body. Opět jsou od sebe vzdáleny půlku kružnice, takže napíšeme pouze jeden žlutý bod a k němu místo 2kπ dáme jen kπ.



$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$\cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2} = 0$

V této rovnici bude nejlepší použití substituce na argument goniometrické funkce, tzn., že zavedeme substituci, která nahradí argumenty funkcí.

$a = \frac{x}{4}$

$\cos a - \sin 2a = 0$

Dále použijeme vzoreček $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ a vytkneme kosinus.

$\cos a - 2\sin a \cos a = 0$

$\cos a\,(1 - 2\sin a) = 0$

Určíme nulové body, čímž nám vzniknou dvě samostatné goniometrické rovnice. Jejich výsledky posléze sjednotíme.

Nulové body:

$\cos a = 0$

$1 - 2\sin a = 0 \rightarrow \sin a = \frac{1}{2}$

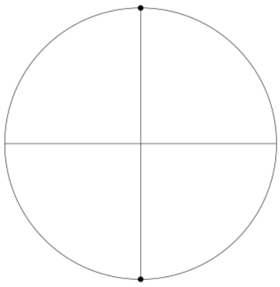
Do nově vzniklých rovnic dosadíme zpátky substituci, čímž dostaneme tvary, které lze vyřešit pomocí jednotkové kružnice.

Dosazení zpátky do substituce:

$\cos\frac{x}{4} = 0$

$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\boldsymbol{x = 2\pi + 4k\pi}$

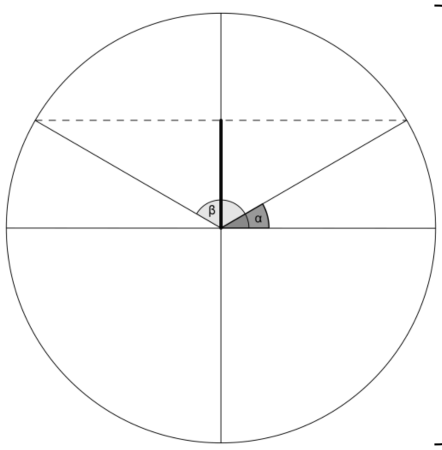


Potřebujeme zjistit, kdy $\cos x$ se rovná nule, víme, že vždy v $\frac{\pi}{2}$, a to jednou za půl kružnice. Tento výsledek dáme do rovnosti s argumentem funkce, kde následně vyjádříme neznámou x, čímž dostaneme konečné řešení této goniometrické rovnice.

$\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{x_1}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{2}{3}\pi + 8k\pi}$



Zde potřebujeme nalézt na kružnici, kdy $\sin x$ se rovná $\frac{1}{2}$. Víme z tabulky pro goniometrické funkce, že je to v úhlu $\frac{\pi}{4}$. Pomocí osové souměrnosti přes vodorovnou půlící osu přeneseme bod na druhou stranu, čímž nám vznikne druhé řešení. Oba body se opakují v kružnici vždy jednou za jedno kolo, tudíž k oběma hodnotám přičteme 2kπ.

$\frac{x_2}{4} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$\boldsymbol{x_3 = \frac{10}{3}\pi + 8k\pi}$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

$$\boldsymbol{K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{2\pi + 4k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + 8k\pi;\ \frac{10}{3}\pi + 8k\pi\right\}}$$

$1 - \cos 2x = \sin 2x \cdot \sin x$

$1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \cdot \sin x$

$1 - (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cos x$

Nejdříve použijeme vzoreček $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Následně ještě nejzákladnější vzoreček $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$, který si patřičně upravíme.

$2 \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cos x \quad /:2$

$\sin^2 x = \sin^2 x \cos x$

$\sin^2 x - \sin^2 x \cos x = 0$

$\sin^2 x\,(1 - \cos x) = 0$

$(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x) = 0$

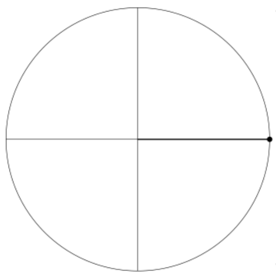
$(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 0$

Rovnici upravíme, vše převedeme na jednu stranu a vytkneme $\sin^2 x$. Dále použijeme opět vzoreček $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$, čímž dostaneme tvar, na který použijeme algebraický vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Teď určíme nulové body, čímž dostaneme dvě nové goniometrické rovnice, přičemž jejich výsledky posléze sjednotíme.

Nulové body:

$\cos x = 1$

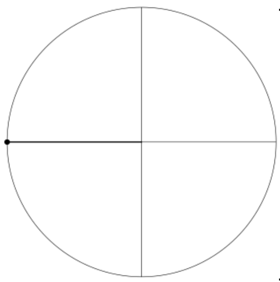
$x = 0 + 2k\pi$



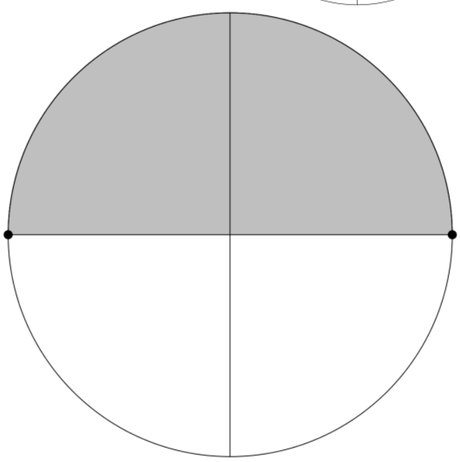
Potřebujeme zjistit, kdy je kosinus roven jedné, z tabulky pro goniometrické funkce víme, že je to pro úhel 0, který se opakuje pouze jednou za jedno kolo.

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2k\pi$



Z tabulky pro goniometrické funkce zjistíme, kdy se kosinus rovná mínus jedné, je to tedy úhel π, který se opakuje vždy jednou za jedno kolo.



Vyšly nám dvě řešení, které ale lze spojit v jedno (často nutné je spojit). Jak vidíte na obrázku vlevo, tak body jsou od sebe vzdáleny půlku kružnice, takže stačí zapsat jeden bod a k němu přidat (přičíst) kπ, tedy 0 + kπ, přičemž nula se obvykle nepíše.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\boldsymbol{k\pi}\}$$

Celkové řešení zapisujeme ve tvaru: $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x_1; x_2\}$ – kde místo x_1 a x_2 dosadíme výsledné hodnoty v radiánech.

Příklady použity z:
ODVÁRKO, Oldřich. Matematika pro gymnázia: Goniometrie. 4. vyd. Havlíčkův Brod: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.