Exponenciální nerovnice

$3^{x+5} < 1$

$3^{x+5} < 3^0$

$x + 5 < 0$

$x < -5$

$\boldsymbol{K} = (-\infty; \boldsymbol{-5})$

Nejdříve potřebujeme dostat na obou stranách nerovnice stejný základ mocniny. Číslo jedna lze zapsat jako jakýkoliv základ mocniny s exponentem nula. Následně pokud máme na obou stranách stejné základy mocnin, pak můžeme dát exponenty do nerovnosti. **POZOR!** Zde je velmi důležitý krok. Exponenty dáme do nerovnosti, ale musíme se rozhodnout, jaká nerovnost bude (zobáček doprava nebo doleva). Pokud bude základ mocniny větší než jedna, pak necháme znaménko nerovnosti stejné, ale pokud bude základ menší než jedna, pak znaménko nerovnosti otočíme. V tomto případě je základ mocniny větší než jedna, tudíž znaménko jen opíšeme a vyřešíme jednoduchou nerovnici.

$0{,}1^{2x} \leq 1$

$0{,}1^{2x} \leq 0{,}1^0$

$2x \geq 0$

$x \geq 0$

$\boldsymbol{K} =< \boldsymbol{0}; \infty)$

Opět potřebujeme na obou stranách rovnice stejné základy mocnin. Číslo jedna můžeme napsat jako jakýkoliv základ mocniny s exponentem nula, protože cokoliv na nultou, je vždy jedna. Když máme stejné základy mocnin, tak můžeme jejich exponenty porovnat. Musíme ale zjistit, jaké bude znaménko nerovnosti (doprava nebo doleva). Pokud bude základ mocniny větší než jedna, pak se znaménko nemění, ale jestliže je základ mocniny menší než jedna, pak se nerovnost obrací. V našem případě je základ mocniny menší, tudíž musíme znaménko nerovnosti otočit. Následně nám vznikla jednoduchá rovnice.

$3^{x-5} < 0$

$\boldsymbol{K} = \emptyset$

V tomto případě jde o příklad k zamyšlení, protože jakékoliv kladné číslo, které bude mít v exponentu libovolné číslo, bude vždy výsledkem kladným, a proto nemůže platit nerovnost.

$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$

Velmi podobný příklad jako již výše uvedený. Vždy bude platit, že kladné číslo na jakoukoliv mocninu bude vždy kladné.

Výsledek nerovnice zapisujeme ve tvaru – $K = \{a \cup b\}$ – kde místo a a b dosadíme výsledné intervaly nerovnice.

$4^x \,.\, 2^x \leq 100$

$2^{2x} \,.\, 2^x \leq 100$

$2^{3x} \leq 100$

$\log 2^{3x} \leq \log 100$

$3x \log 2 \leq \log 100$

$3x \leq \dfrac{\log 100}{\log 2}$

$3x \leq \log_2 100$

$x \leq \dfrac{\log_2 100}{3}$

$x \leq \dfrac{\log_2 100}{\log_2 8}$

$x \leq \log_8 100$

$\boldsymbol{K = (-\infty;\ \log_8 100 >}$

(V tomto příkladu je potřeba znát logaritmické rovnice.) Opět potřebujeme dostat na obou stranách nerovnice stejné základy mocnin, v tomto případě to ale bude složitější, jelikož neexistuje „na první pohled“ žádný společný základ. Nejdříve základy mocnin, které mají v exponentu neznámou, sloučíme dohromady. Následně pak **zlogaritmujeme** rovnici a použijeme vzoreček $\log_a r^s = s \,.\log_a r$. Poté zbylý logaritmus převedeme na druhou stranu nerovnice, čímž nám vznikly dva logaritmy v podílovém tvaru, které převedeme do jednoho logaritmu pomocí vzorečku $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Poté vydělíme celou rovnici třemi. Následně můžeme číslo tři zapsat také jako $\log_2 2^3$ pomocí vzorečku $\log_a a^r = r$. Potom opět převedeme dva logaritmy v podílovém tvaru do jednoho logaritmu. Teď už máme konečný výsledek nerovnice.

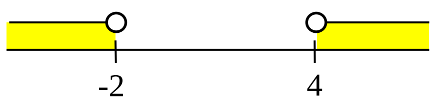
Výsledek nerovnice zapisujeme ve tvaru – $K = \{a \cup b\}$ – kde místo *a* a *b* dosadíme výsledné intervaly nerovnice.

$\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$

$x^2 > 2x + 8$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$(x + 2)(x - 4) > 0$



$\boldsymbol{K = (-\infty; -2) \cup (4;\ \infty)}$

V tomto případě již máme ulehčené hledání společného základu mocnin, tudíž můžeme hned porovnat jejich exponenty. Nesmíme ale zapomenout na změnu nerovnosti, protože je základ mocniny menší než jedna. Po úpravě nám vyšla kvadratická nerovnice, ze které jsme dostali požadované kořeny (nulové body). Body zakreslíme na osu, a poté dosadíme do kvadratické nerovnice libovolné číslo z každého intervalu. Pokud bude platit rovnost, tak tam daný interval patří, pokud nebude platit, tak tam nepatří – viz osa vlevo.

Výsledek nerovnice zapisujeme ve tvaru – $K = \{a \cup b\}$ – kde místo *a* a *b* dosadíme výsledné intervaly nerovnice.

Příklady použity z:

PETÁKOVÁ, Jindra. Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

