Iracionální rovnice

- Rovnice s neznámou v odmocněnci (pod odmocnítkem)

Řešte rovnici, kde $x \in$ R:

$\sqrt{x} = 3 \quad /^2$

Pokud je v rovnici odmocnina, tak ji odstraníme umocněním celé rovnice – viz rovnice vlevo.

$\sqrt{x^2} = 3^2$

$x = 9$

Pokud v rovnici uděláme neekvivalentní úpravu (např. umocnění), tak musíme udělat zkoušku, zda je kořen správný.

<u>Zkouška:</u>

U zkoušky počítáme pravou a levou část rovnice **zvlášť** a poté ověříme, zda se rovnají. Pokud se **nerovnají**, rovnice **nemá řešení**, pokud se **rovnají**, tak je kořen rovnice **správný**.

$L = \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$

$P = 3$

Místo neznámé dosadíme výsledný kořen rovnice.

$\boldsymbol{L = P = 3}$

$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{9}\}$

Když zkouška vyšla, tak můžeme řešení rovnice zapsat ve tvaru: $K = \{a\}$ – místo *a* dosadíme kořen rovnice.

Řešte rovnici, kde $x \in$ R:

$\sqrt{x} + x = 2$

!POZOR! Pokud chceme rovnici umocňovat kvůli odmocnině, která se nám v rovnici nachází, tak musí být sama na jedné straně rovnice (popř. s další odmocninou) – viz rovnice vlevo.

$\sqrt{x} = 2 - x \qquad /^2$

Zde je odmocnina sama na jedné straně rovnice, tak už můžeme celou rovnici umocnit.

$\sqrt{x^2} = (2 - x)^2$

Když se při umocňování rovnice nachází na jedné straně rovnice sčítání nebo odčítání dvou členů (včetně odmocnin!), tak je umocňujeme podle vzorce - $(a + b)^2$ nebo $(a - b)^2$!!! V žádném případě je **NEumocňujeme** každý zvlášť!!!

$x = 4 - 4x + x^2$

$0 = x^2 - 5x + 4$

$0 = (x - 1)(x - 4)$

Když nám vyjde výsledek, který se počítá přes kvadratickou rovnici, tak máme dva způsoby řešení. První způsob je dosazení do vzorečku kvadratické rovnice. Druhý způsob je rozklad. Budeme používat způsob druhý, protože je mnohem rychlejší. Pokud nevíte, jak se tímto způsobem počítá, tak se podívejte na kapitolu Rozklady kvadratických trojčlenů, kterou najdete na www.nasprtej.cz.

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4$

Když máme kořeny rovnice, tak **musíme** ještě udělat pro oba kořeny zkoušku, protože jsme v rovnici použili **neekvivalentní úpravu**!

Zkouška:

U zkoušky počítáme pravou a levou část rovnice **zvlášť** a poté ověříme, zda se rovnají. Pokud se **nerovnají**, daný kořen **není** řešením rovnice, pokud se **rovnají**, tak **je** daný kořen řešením rovnice.

Pro x_1:

$L = \sqrt{x} + x = \sqrt{1} + 1 = 1 + 1 = 2$

$P = 2$

Místo neznámé dosadíme daný výsledný kořen rovnice.

$\boldsymbol{L = P = 2}$ ⟶ Zkouška **platí**, tudíž tento kořen **patří** do celkového řešení rovnice.

Pro x_2:

$L = \sqrt{x} + x = \sqrt{4} + 4 = 2 + 4 = 6$

$P = 2$

Místo neznámé dosadíme daný výsledný kořen rovnice.

$\boldsymbol{L \neq P}$ ⟶ Zkouška **neplatí**, tudíž tento kořen **nepatří** do celkového řešení rovnice.

$\boldsymbol{K = \{1\}}$ ⟶ Do celkového řešení patří ta neznámá, které vyšla zkouška. Pokud by zkouška vyšla oběma neznámým, tak řešením budou oba dva body. Když nevyjde zkouška ani u jedné neznámé, tak řešením je prázdná množina (nemá řešení).

$\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3 \qquad /^2$

Když se při umocňování rovnice nachází na jedné straně rovnice sčítání nebo odčítání dvou členů (včetně odmocnin!), tak je umocňujeme podle vzorce: $(a+b)^2=a^2+2ab+$ $+b^2$ nebo $(a-b)^2=a^2-2ab+$ $+b^2$!!! V žádném případě je **NEumocňujeme** každý zvlášť!!!

$\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}\right)^2=3^2$

$\sqrt{(x-5)^2}+2\,.\sqrt{x-5}\,.\,\sqrt{10-x}+\sqrt{(10-x)^2}=3^2$

$x-5+2\,.\sqrt{x-5}\,.\,\sqrt{10-x}+10-x=9$

$5+2\,.\,\sqrt{x-5}\,.\,\sqrt{10-x}=9$

$2\,.\,\sqrt{x-5}\,.\,\sqrt{10-x}=4 \qquad /^2$

$2^2(x-5)(10-x)=4^2$

$4(10x-x^2-50+5x)=16 \qquad /:4$

Pro jednodušší výpočet je lepší rovnici vydělit čtyřmi, ale pokud tento krok neuděláme, tak to konečné řešení nezmění!

$10x-x^2-50+5x=4$

$-x^2+15x-54=0 \;\; /:(-1)$

$x^2-15x+54=0$

Když máme takto upravenou rovnici, tak nezbývá nic jiného než udělat rozklad nebo dosadit hodnoty do vzorečku kvadratické rovnice.

$(x-9)(x-6)=0$

$\boldsymbol{x_1=9} \quad \boldsymbol{x_2=6}$

Když máme kořeny rovnice, tak **musíme** udělat zkoušku, protože jsme v rovnici použili **neekvivalentní** úpravu (např. umocnění)!!!

<u>Zkouška:</u>

U zkoušky počítáme pravou a levou část rovnice **zvlášť** a poté ověříme, zda se rovnají. Pokud se **nerovnají**, daný kořen **není** řešením rovnice, pokud se **rovnají**, tak **je** daný kořen řešením rovnice.

Pro x_1:

$L=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=\sqrt{9-5}+\sqrt{10-9}=\sqrt{4}+\sqrt{1}=2+1=3$

$P=3$

$\boldsymbol{L=P=3}$

Pro x_2:

$L=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=\sqrt{6-5}+\sqrt{10-6}=\sqrt{1}+\sqrt{4}=1+2=3$

$P=3$

$\boldsymbol{L=P=3}$

$\boldsymbol{K=\{9;6\}}$

Do celkového řešení patří ta neznámá, které **vyšla** zkouška. Pokud by zkouška vyšla oběma neznámým, tak řešením budou oba dva body. Když nevyjde zkouška ani u jedné neznámé, tak řešením je prázdná množina (nemá řešení).

Příklady použity z:

CHARVÁT, Jura; ZHOUF, Jaroslav; BOČEK, Leo. Matematika pro gymnázia : Rovnice a nerovnice. 3. vydání. Praha : Prometheus, 2002. 223 s. ISBN 80-7196-154-X.